135 एवं 225 का म० स० यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कर ज्ञात करे ?

हल ÷

सूत्र से : भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल

$= 225 = 135 \times 1 + 90$

$= 135 = 90 \times 1 + 45$

$= 90 = 45 \times 2 + 0$

$$\begin{array}{r} 135)\,225\,(1 \\ 135 \\ \hline 90)\,135\,(1 \\ 90 \\ \hline 45)\,90\,(2 \\ 90 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\therefore$ (135, 225 का म० स० = 45) Ans

A:P 7, 13, 19, ----205 मे कितने पद है

हल ÷

दिये गये A:P का पहला पद (a) = 7

तथा सार्वअंतर (d) = 13 − 7 = 6

माना कि दिये गये A:P मे n पद है

$a_n = a + (n-1)d = 205$

$= 7 + (n-1)6 = 205$

$= 6n - 6 = 205 - 7$

$= 6n - 6 = 198$

$= 6n = 198 + 6$

$= n = \cancel{\frac{204}{6}}\ 34$

$= n = 34$

अत: दिये गये A:P मे 34 पद है।

K का एक ऐसा मान ज्ञात किजिए कि उसके दो बराबर मूल हो (i) $2x^2+Kx+3=0$

हल ÷

यहा $a=2,\ b=K,\ c=3$

∴ दि गई द्विघात समीकरण के मूल बराबर है

$$D=0$$

$$= b^2-4ac=0$$

$$=(K)^2-4\times2\times3=0$$

$$=K^2-24=0$$

$$=K^2=24$$

$$=K=\sqrt{24}$$

$$=K=\pm2\sqrt{6}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} K+2\sqrt{6} \\ K-2\sqrt{6} \end{array}}$$

दुरी सूत्र प्रयोग कर दिखाइये कि बिन्दुऐं A(1,5) B =(2,4) और C(3,3) संरेखी है।

हल :

दिये गये बिन्दु A(1,5) B(2,4) C(3,3) है

$\therefore AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\sqrt{(2-1)^2+(4-5)^2}$

$\sqrt{(1)^2+(-1)^2}$

$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(3-2)^2+(3-4)^2}$

$\sqrt{(1)^2+(-1)^2}$

$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(3-1)^2+(3-5)^2}$

$\sqrt{(2)^2+(-2)^2}$

$\sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

अतः बिन्दु $AB = BC \neq AC$ तीनो बिन्दु सरेखी नहीं है

दो बिन्दु P(15,9) और Q(5,3) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु का नियामक ज्ञात करे?

हल :

दिया है दो बिन्दु P (15,9) Q (5,3)

सुत्र से

$= \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}$

$= \frac{15+5}{2}, \frac{9+3}{2}$ $= \boxed{10, 6}$ Ans

$\cancel{\frac{20}{2}}\ 10, \cancel{\frac{12}{2}}\ 6$

सिद्ध करे $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \operatorname{cosec} A + \cot A$

हल ÷

L.H.S $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{1+\cos A}{1-\cos A}\right)\frac{1+\cos A}{(1+\cos A)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{1-\cos^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1+\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A}$$

$\operatorname{cosec} A + \cot A$

L.H.S = R.H.S

निम्न द्विघात समीकरणो के मूलो कि प्रकृति ज्ञात किजिए = $2x^2-3x+5=0$

हल ÷

यहा दि गई द्विघात समीकरण

$$2x^2-3x+5=0$$

$a=2,\ b=-3,\ c=5$

$$D = b^2-4ac$$

$$=(-3)^2-4\times2\times5$$

$$=9-40$$

$$=-31<0$$

अतः दि गई द्विघात समीकरण का कोई वास्तविक मूल नही है

K के किस मान के लिए निम्न समीकरण के युग्म का एक हल है $4x + Ky + 8 = 0$ —— (1) $2x + 2y + 2 = 0$ —— (2)

हल :

यहा $= a_1 = 4,\ b_1 = K,\ c_1 = 8$

$a_2 = 2,\ b_2 = 2,\ c_2 = 2$

अब दिए गए युग्म का एक हल है

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{4}{2} \neq \frac{K}{2}$$

$$2K \neq 8$$

$$K \neq \cancel{\frac{8}{2}}$$

$$\boxed{K \neq 4}$$

* 8 के प्रथम 15 गुणज का योग ज्ञात किजिए।

हल ÷ 8, 16, 24...... 15 गुणज

$\therefore$ $a = 8$ $d = a_2 - a_1 = 16 - 8 = 8$ $S_n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{15}{2}[2 \times 8 + (15-1) \times 8]$$

$$= \frac{15}{2}[16 + 14 \times 8]$$

$$= \frac{15}{2}[16 + 112]$$

$$= \frac{15}{2}[128]$$

$$= \frac{15}{2} \times 128 = \frac{1920}{2} = \boxed{960 \text{ Ans}}$$

निम्न रैखिक समीकरणो को ज्ञात किजिए कि संगत है असंगत

$2x-3y=8$ ——— (1) $4x-6y=9$ ——— (2)

हल ÷

$a_1=2,\ b_1=-3,\ c_1=8$

$a_2=4,\ b_2=-6,\ c_2=9$

$= \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$= \frac{\cancel{2}1}{\cancel{4}2} = \frac{\cancel{-3}1}{\cancel{-6}2} = \frac{8}{9}$

$= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{8}{9}$

अतः रैखिक समीकरण का युग्म असंगत है

बिन्दु A(4,6) तथा B(10,8) का बिच का दुरी ज्ञात किजिए

हल ÷ दिया है A(4,6) B(10,8)

$x_1 = 4$, $x_2 = 10$
$y_1 = 6$, $y_2 = 8$

∴ दुरी सुत्र से

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$= \sqrt{(10-4)^2 + (8-6)^2}$
$= \sqrt{(6)^2 + (2)^2}$
$= \sqrt{36 + 4}$
$= \sqrt{40}$

अत: AB का दुरी $= \sqrt{40}$

A.P. 1, 4, 7, 10 ---- के 18वे पद ज्ञात किजिए

हल ÷ दिया गया A.P 1, 4, 7, 10 ---- मे

पहला पद (a) = 1

सार्वअंतर(d) = 4 − 1 = 3

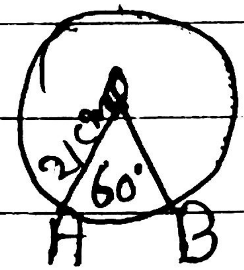
A.P का 18 वा पद $= a_{18} = a + (n-1)d$
$= 1 + (18-1)\,3$
$= 1 + 17 \times 3$
$= 1 + 51$
$= 52$

21cm त्रिज्या वाले एक वृत के त्रिज्यारखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करे जिसका को 60° है

हल :-

दिया है त्रिज्या R = 21cm

तथा कोण = 60°



∴ त्रिज्यारखण्ड का क्षेत्रफल

$$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$\frac{\cancel{60}}{\cancel{360}_{6}} \times \frac{22}{\cancel{7}} \times 21 \times \cancel{21}^{3}$$

$$= \frac{22 \times 21 \times 3}{6} = \frac{\cancel{1386}}{\cancel{6}} = \boxed{231} \text{ Ans}$$

$\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$

हल

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{3+1}{4} = \cancel{\frac{4}{4}} = 1 \text{ ans}$$

A.P. 3, 8, 13, 18...... का कौन सा पद 78 है

हल ÷

दिये गए A.P 3, 8, 13, 18 का पहला पद (a) = 3
तथा सार्वअंतर = (d) = 8 − 3 = 5

माना कि A.P का n वा पद 78 है

$$a_n = a + (n-1)d = 78$$

$$= 3 + (n-1)5 = 78$$

$$= 3 + 5n - 5 = 78$$

$$= 5n - 5 = 78 - 3$$

$$= 5n - 5 = 75$$

$$= 5n = 75 + 5$$

$$= 5n = 80$$

$$= n = \frac{\cancel{80}^{16}}{\cancel{5}}$$

$$= n = 16$$

यदि किसी बहुपद के मूलो का योग -7 और गुणफल 6 है तो बहुपद ज्ञात कीजिए ?

हल ÷ दिया है

मूलो का योग $= -7$

तथा गुणफल $= 6$

$\therefore$ बहुपद $= x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha \cdot \beta)$

$= x^2 - (-7)x + (6)$

$\boxed{= x^2 + 7x + 6}$

अत: बहुपद $= \underline{x^2 + 7x + 6}$

निम्न समिकरण को वज्र गुणनखण्ड विधि से हल करे

(1) $8x+5y=9$ —(1)   (2) $3x+2y=4$ —(2)

हल ÷ यहा = $a_1=8$, $b_1=5$, $c_1=9$

$a_2=3$, $b_2=2$, $c_2=4$

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\frac{x}{5\times4-2\times9} = \frac{y}{9\times3-4\times8} = \frac{1}{8\times2-3\times5}$$

$$\frac{x}{20-18} = \frac{y}{27-32} = \frac{1}{16-15}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{1} \qquad \frac{y}{-4} = \frac{1}{1}$$

$\boxed{x=2}$ Ans $\boxed{y=-4}$ Ans

24. k **का मान ज्ञात कीजिए यदि तीनों बिन्दु (8, 1), (k, –4) तथा (2, –5) संरेखी है।** **[14 A, 14 C, 16 C]**

हल : माना कि दिए गए बिन्दु $A(8, 1), B(k, -4)$ और $C(2, -5)$ है।

यहाँ, $x_1 = 8, x_2 = k, x_3 = 2$

$y_1 = 1, y_2 = -4, y_3 = -5$

तीनों बिन्दु संरेखी होते हैं यदि

$$8 - 6k + 10 = 0$$

या $$\frac{1}{2}[8(-4+5] + k(-5-1) + 2(1+5)] = 0$$

या $$8 - 6k + 10 = 0$$

या $$-6k = -18 \quad \therefore\ k = -\frac{18}{-6} = 3;$$ उत्तर।

16. x-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $(5, 3)$ तथा $(3, 5)$ से समदूरस्थ है। **14 A, 14C**

हल : प्रश्नानुसार, अभीष्ट बिन्दु (माना बिन्दु P) x-अक्ष पर स्थित है। अतः बिन्दु P के निर्देशांक $(x, 0)$ है। माना कि A और B क्रमशः बिन्दुओं $(5, 3)$ और $(3, 5)$ को व्यक्त करते हैं।

चूँकि $AP = BP$ (दिया है)

अतः $AB^2 = BP^2$

या, $(x-5)^2 + (0-3)^2 = (x-3)^2 + (0-5)^2$

या, $x^2 - 10x + 25 + 9 = x^2 - 6x + 9 + 25$

या, $-4x = 34 - 34$

$\therefore \quad x = \dfrac{0}{4} = 0$

इस प्रकार अभीष्ट बिन्दु $(0, 0)$ है; उत्तर।

14. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष हैं :

(i) (2, 3); (–1, 0); (2, –4) **BM, 13A, 16C**

(ii) (–5, –1); (3, –5); (5, 2) **11 C, 13 C**

(iii) (1, –1), (– 4, 6) और (–3, –5) **11 A**

हल : (i) मान लीजिए ΔABC के शीर्ष A (2, 3); B (–1, 0) और C (2, – 4) हैं।

यहाँ $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 2; y_1 = 3, y_2 = 0, y_3 = -4$

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[2 \times (0 + 4) - 1 \times (-4 - 3) + 2 \times (3 - 0)]$$

$$= \frac{1}{2}[8 + 7 + 6] = \frac{21}{2} = 10.5$$ वर्ग मात्रक; उत्तर।

1. y-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं $(-5, -2)$ तथा $(3, 2)$ से समदूरस्थ हैं।

हल : चूँकि अभीष्ट बिन्दु (माना P) $y-$अक्ष पर स्थित है।

अतः इसकी भुज शून्य है। माना इस बिन्दु की कोटि y है। अतः बिन्दु P का निर्देशांक $(0, y)$ है।

माना A और B बिन्दुओं $(-5, -2)$ तथा $(3, 2)$ को व्यक्त करते हैं।

चूँकि $\quad AP = BP$ (दिया है),

अतः $\quad AP^2 = BP^2$

अर्थात् $\quad (-5, -0)^2 + (-2-y)^2 = (3-0)^2 + (2-y)^2$

या, $\quad 25 + 4 + y^2 + 4y = 9 + 4 + y^2 - 4y$

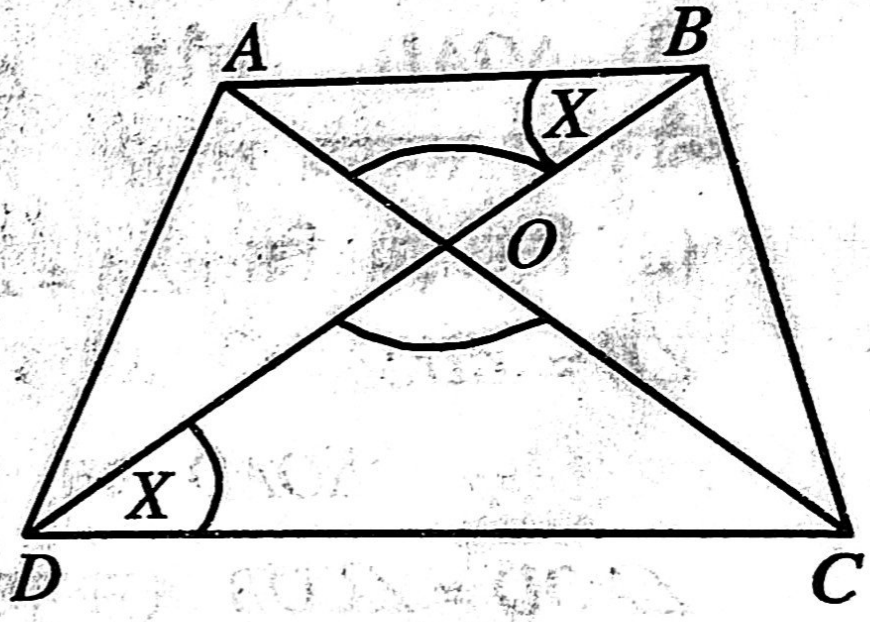
या, $\quad 8y = 9 - 25 = -16$

$\therefore \quad y = -\dfrac{16}{8} = -2$

इस प्रकार अभीष्ट बिन्दु $(0, -2)$ है; उत्तर।

8. एक समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में $AB \parallel DC$ तथा उसके विकर्ण एक-दूसरे को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है, तो सिद्ध करें कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$.

12 A, 13 A, 18 C



हल : दिया है : $ABCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel DC$ तथा जिसके विकर्ण AC तथा BD, परस्पर O बिन्दु पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

प्रमाण : ΔOAB और ΔOCD में,

$$\angle AOB = \angle DOC$$

तथा $\angle ABO =$ एकान्तर $\angle ODE$ $(\because AB \parallel DC)$

$\therefore$ $\Delta ABO \sim \Delta OCD$

$\therefore$ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$; (प्रमाणित)।

19. A. P. का 31 वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11 वाँ पद 38 है और 16 वाँ पद 73 है। **13A, 13C**

हल : माना कि दिए गए A.P. का पहला पद a और सार्वअन्तर d है।

दिया गया 11 वाँ पद $= 38$

अर्थात् $T_{11} = 38$

या $a + (11-1)d = 38$ [$\because$ A.P. का n वाँ पद $a + (n-1)d$]

या $a + 10d = 38$ ... (i)

पुनः $T_{16} = 73$

या $a + (16-1)d = 73$

या $a + 15d = 73$ ... (ii)

समी (ii) में से (i) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} a + 15d = 73 \\ -a \pm 10d = 38 \\ - \quad - \\ \hline 5d = 35 \end{array} \qquad \therefore \; d = 7$$

पुनः $d = 7$ समी (i) में रखने पर,

$a + 10 \times 7 = 38 \; \therefore \; a = -70 + 38 = -32$

अतः $T_{31} = a + (31-1)d = a + 30 \times d$

$= -32 + 30 + 7 = -32 + 210 = 178$

$\therefore$ 31 वाँ पद 178; उत्तर।

8. A.P. 3, 8, 13, 18 ..... का कौन-सा पद 78 है? **BM, 16C, 17A**

हल : दिये गये A. P. 3, 8, 13, 18, ... का प्रथम पद $a = 3$ और सार्वअंतर $d = 8 - 3 = 13 - 8 = 5$

माना कि दिये गये A.P. का nवाँ पद 78 है।

अर्थात् $t_n = 78$

या, $a + (n-1)d = 78$

या, $3 + (n-1) \times 5 = 78$

या, $5(n-1) = 75$

या, $n - 1 = \frac{75}{5} = 15$

$\therefore$ $n = 16$

अतः दिये गये A.P. का 16वाँ पद 78 होगा; उत्तर।

$\therefore$ हमारी यह कल्पना कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, गलत है।
अतः $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। (सिद्ध हुआ।)

8. सिद्ध करें कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। **BM, 11 C, 15 A, 16 C**

हल : मान लीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore$ हम अविभाज्य संख्या a और b प्राप्त कर सकते हैं जहाँ a और $b(b \neq 0)$ पूर्णांक है कि $3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}$

$$\therefore \quad 3-\frac{a}{b}=2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3-\frac{a}{b}}{2}=\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5}=\frac{3}{2}-\frac{a}{2b}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{5}=\frac{3b-a}{2b} \quad \text{... (i)}$$

चूँकि a और b दोनों पूर्णांक हैं।

$$\therefore \quad \frac{3b-a}{2b}=\frac{3\,(\text{पूर्णांक} - \text{पूर्णांक})}{2\times \text{पूर्णांक}}=\text{परिमेय संख्या}$$

अतः, (i) $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

परन्तु यह इस तथ्य का विरोधाभास है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$\therefore$ हमारी कल्पना गलत है।

अतः $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। (सिद्ध हुआ है।)

7. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या हैं। **BM, 15 A, 18 A**

हल : मान लीजिए कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए हम ऐसे दो पूर्णांक r और S जहाँ $S \neq 0$ प्राप्त कर सकते हैं कि $\sqrt{5} = \frac{r}{S}$

मान लीजिए r और S के 1 के अतिरिक्त अन्य कुछ गुणनखण्ड हैं, तो हम उस उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से भाग देकर प्राप्त कर सकते हैं।

$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ जहाँ, a और $b, b \neq 0$ सह अभाज्य है।

$\Rightarrow \quad b\sqrt{5} = a$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$\Rightarrow \quad (b\sqrt{5})^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad b^2(\sqrt{5})^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad 5b^2 = a^2$ ... (i)

$\therefore \quad 5, a^2$ को विभाजित करता है।

प्रमेय से यदि एक अभाज्य संख्या 'p', a^2 को विभाजित करता है, तो 'p', a जहाँ a एक पूर्णांक है, को भी विभाजित करता है।

$\Rightarrow \quad 5, a$ को विभाजित करता है ... (ii)

अतः $a = 5c$ जहाँ c कोई पूर्णांक है।

a का मान समी॰ (i) में प्रतिस्थापित करने पर,

$5b^2 = (5c)^2$

$\Rightarrow \quad 5b^2 = 25c^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 5c^2$

$\Rightarrow \quad 5c^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad 5, b^2$ को विभाजित करता है।

$\because$ प्रमेय से यदि एक अभाज्य संख्या 'P', a^2 को विभाजित करता है, तो 'p', a जहाँ a एक पूर्णांक है, को भी विभाजित करता है।

$\Rightarrow \quad 5, b$ को विभाजित करता है ... (iii)

समी॰ (ii) और (iii) से, a और b का कम-से-कम एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। परन्तु यह इस तथ्य का विरोधाभास है कि a और b अविभाज्य है अर्थात् इनके 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हैं।

4. 135 एवं 225 का म॰ स॰ यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कर ज्ञात करें। **BM, 12 A, 18 C**

हल : चूँकि $225 > 135$, अतः 225 एवं 135 पर यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म प्रयोग करने पर :

$$225 = 135 \times 1 + 90$$

चूँकि शेषफल $90 \neq 0$ है, अतः 135 एवं 90 पर यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करने पर—

$$135 = 90 \times 1 + 45$$

पुनः $45 \neq 0$ है, अतः 90 एवं 45 पर पुनः यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करने पर—

$$90 = 45 \times 2 + 0$$

चूँकि शेषफल $= 0$

$\therefore$ 90 एवं 45 का म॰स॰ $= 45$ है;

अतः 135 एवं 215 का म॰ स॰ $= 45$ है; उत्तर।

13. वज्र गुणन विधि से समीकरण $8x + 5y = 9$ एवं $3x + 2y = 4$ का हल निकालें।

14. सिद्ध करें कि $\tan 48° . \tan 23° . \tan 42° , \tan 67° = 1$

15. एक द्विघात बहुपद ज्ञात करें जिसमें शून्यक $\sqrt{3} + 1$ एवं $\sqrt{3} - 1$ हैं।

16. द्विघात समीकरण $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ के मूल ज्ञात करें।

17. यदि किसी संख्या और उसके व्युत्क्रम का योग $\frac{10}{3}$ है, तो संख्या ज्ञात करें।

18. समांतर श्रेढ़ी 21, 18, 15.... का कौन-सा पद –81 है ?

32. एक वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है। **BM, 11 A, 12 A, 12 C, 19 A**

हल : वृत्त की परिधि $= 22 \text{ cm}$

$$2\pi R = 22$$

$$R = \frac{22 \times 7}{2 \times 22} = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

केन्द्रीय कोण [चतुर्थांश] $(\theta) = 90°$

∴ चतुर्थांश का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi R^2 \theta}{360} = \frac{\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 90}{360} = \frac{77}{8} \text{ cm}^2$$

चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= 9.625 \text{ cm}^2$; उत्तर।

(33.) निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

(ii) $2\tan^2 45° + \cos^2 60° + \sin^2 60°$ **11 A, 13 A**

(iii) $\dfrac{\cos 45°}{\sec 30° + \text{cosec } 30°}$ **BM**

(iv) $\dfrac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ **11 C**

(v) $\dfrac{\sin 30° + \tan 45° - \text{cosec } 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

(vi) $\dfrac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - 3\tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$ **BM, 20 A, 21 A**

हल : (i) दिया है :

$$\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1;$$ उत्तर।

(ii) दिया है :

$$2\tan^2 45° + \cos^2 60° + \sin^2 60°$$
$$= 2(\tan 45°)^2 + (\cos 60°)^2 + (\sin 60°)^2$$
$$= 2(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= 2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8+1+3}{4} = \frac{12}{4} = 3;$$ उत्तर।

(iii) दिया है : $\dfrac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+(2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times(\sqrt{3}-1)}{4(3-1)} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$$; उत्तर।

(iv) दिया है : $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} = \dfrac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; उत्तर।

(v) दिया है : $\dfrac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{2}+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3}-4)(3\sqrt{3}-4)}{(3\sqrt{3}+4)(3\sqrt{3}-4)}$$

$$= \frac{27+16-24\sqrt{3}}{27-16} = \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$; उत्तर।

(vi) दिया है : $\dfrac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30 - 3\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

$$= \frac{5(\cos 60^\circ)^2 + 4(\sec 30^\circ)^2 - (3\tan 45^\circ)}{(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 3(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{4}+4\times\frac{4}{3}-3}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-3}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

37. दिखाइए कि—

(i) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67° = 1$ $\boxed{\text{BM, 14 C, 20 A}}$

(ii) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0$ $\boxed{\text{BM, 16 C}}$

(iii) $\sin 48° . \sin 23° . \sec 42° . \sec 67° = 1$ $\boxed{\text{14 A}}$

हल : (i) L.H.S.

$$= \tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67°$$

$$= \tan 48° \times \tan 23° \tan (90° - 48°) \times \tan (90° - 23°)$$

$$= \tan 48° \times \tan 23° \times \cot 48° \times \cot 23°$$

$$= \tan 48° \times \tan 23° \times \frac{1}{\tan 48°} \times \frac{1}{\tan 23°} = 1$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (प्रमाणित)।

(ii) L.H.S. $= \cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52°$

$$= \cos 38° \times \cos (90° - 38°) - \sin 38° \times \sin (90° - 38°)$$

$$= \cos 38° \times \sin 38° - \sin 38° \times \cos 38° = 0.$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (प्रमाणित)।

(iii) L.H.S. $= \sin 48° . \sin 23° . \sec 42° . \sec 67°$

$$= \sin 48° . \sin 23° . \frac{1}{\cos 42°} . \frac{1}{\cos 67°}$$

$$= \sin 48° . \sin 23° . \frac{1}{\cos(90° - 48°)} . \frac{1}{\cos(90° - 23°)}$$

$$= \sin 48° . \sin 23° \times \frac{1}{\sin 48°} . \frac{1}{\sin 23°} = 1 \text{ R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (प्रमाणित)।

$\boxed{\text{13 A}}$

43. सिद्ध करें $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$ **14 A**

या, $\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A} = (\sec A - \tan A)^2$ **20 A**

हल : $\text{L.H.S.} = \sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}} = \sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}} = \frac{1-\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$$

$\sec A - \tan A$ R.H.S. (प्रमाणित)।

44. सिद्ध करें $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \operatorname{cosec} A + \cot A$ **14 A**

हल :

$$\text{L.H.S} = \sqrt{\frac{(1+\cos A)(1+\cos A)}{(1-\cos A)(1+\cos A)}} = \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{1-\cos^2 A}} = \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1+\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A}$$

$= \operatorname{cosec} A + \cot$ R.H.S. (प्रमाणित)।

45. मान निकालिए :

(i) $\dfrac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$ **11 C, 18 C**

(ii) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$

हल : (i) $\dfrac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$

$$= \frac{\{\sin(90^\circ - 27^\circ) + \sin^2 27^\circ\}}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 (90^\circ - 17^\circ)^2}$$

$\because \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ और $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta.$

$$= \frac{\{\cos 27^\circ\}^2 + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \{\sin 17^\circ\}^2}$$

$$= \frac{\cos^2 27^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \sin^2 17^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$; उत्तर।

k का मान ज्ञात कीजिए यदि तीनों बिन्दु (8, 1), (k, –4) तथा (2, –5) संरेखी है।

हल : माना कि दिए गए बिन्दु $A(8,1), B(k,-4)$ और $C(2,-5)$ है।

यहाँ, $x_1 = 8, x_2 = k, x_3 = 2$

$y_1 = 1, y_2 = -4, y_3 = -5$

तीनों बिन्दु संरेखी होते हैं यदि

$$8 - 6k + 10 = 0$$

या $$\frac{1}{2}[8(-4+5] + k(-5-1) + 2(1+5)] = 0$$

या $$8 - 6k + 10 = 0$$

या $-6k = -18 \quad \therefore \ k = -\frac{18}{-6} = 3$; उत्तर।

सिद्ध करें कि : $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

हल : बायाँ पक्ष $= \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)} \cdot \dfrac{(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}}$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos^2\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

= दायाँ पक्ष (प्रमाणित)।

सिद्ध करें कि :

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$$

हल : बायाँ पक्ष $= \sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sqrt{\dfrac{(1+\sin A)}{(1-\sin A)} \times \left(\dfrac{1+\sin A}{1+\sin A}\right)}$

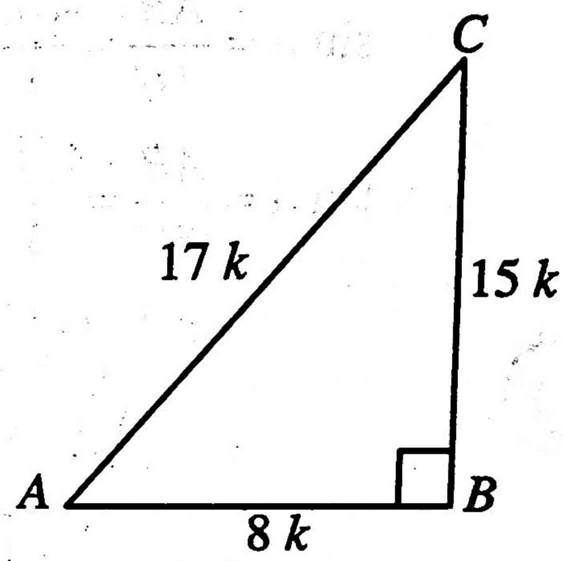
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}} = \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$= \sec A + \tan A =$ दायाँ पक्ष (प्रमाणित)।

22. यदि $15 \cot A = 8$ हो, तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए। **11 A, 12 A**

हल : मान लीजिए ABC कोई समकोण त्रिभुज है जिसमें A न्यून कोण है और B पर समकोण है।



आकृति से $15 \cot A = 8$

$$\cot A = \frac{8}{15}$$

परन्तु $$\cot A = \frac{AB}{BC}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{AB}{BC} = \frac{8}{15} = k$$

जहाँ, k आनुपातिकता स्थिरांक है।

$\Rightarrow$ $AB = 8, BC = 15\ k$

पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$$AC^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$\Rightarrow$ $(AC)^2 = (8\ k)\ 7^2 + (15\ k)^2$

$\Rightarrow$ $(AC)^2 = 64\ k^2 + 225\ k^2$

$\Rightarrow$ $(AC)^2 = 289\ k^2$

$\Rightarrow$ $AC = \pm\sqrt{289}\ \ k^2$

$\Rightarrow$ $AC = \pm\ 17\ k$

$\Rightarrow$ $AC = 17\ k$

$[AC = -17\ k$, क्योंकि भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती]

$$\sin A = \frac{AB}{AC} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}$$

$$\sin A = \frac{8}{17}$$

$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{17k}{8k} = \frac{17}{8}$$

अतः $\sin A = \frac{15}{17}$ और $\sec A = \frac{17}{8}$ उत्तर।

3. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है।

(i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\dfrac{\cos A}{1+\sin A} + \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$ **13 A, 13 C, 19 A**

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1+\tan\theta\cot\theta$ **19 C, 21 A**

[संकेत : व्यंजकों को $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के पदों में लिखिए]

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ **BM, 21 A**

[संकेत : L.H.S. और R.H.S. को अलग-अलग सरल कीजिए]

(v) $\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A,$ **BM**

सर्वसमिका $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ को लागू करके

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A \cot^2 A$

12 C, 19 A

(ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$ **20 A**

[संकेत : L.H.S. और R.H.S. को अलग-अलग सरल कीजिए]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)$

हल : (i) L.H.S. $= (\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \left\{\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right\}^2$

$$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

सर्वसमिका $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ का प्रयोग करने से,

$$\Rightarrow \qquad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)\times(1+\cos\theta)} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (प्रमाणित)।

(ii) $$\text{L.H.S.} = \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{(\cos A)^2 + (1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\times(\cos A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2\sin A}{(1+\sin A)\times\cos A}$$

$$\{\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 + 2\sin A}{(1+\sin A)\times\cos A}$$

$$= \frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)\times\cos A} \qquad (\because \cos^2 A + \sin^2 A = 1)$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)\times\cos A} = \frac{2}{\cos A} = 2\sec A$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (**प्रमाणित**)।

(iii) $$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\sin\theta\times\sin\theta}{\cos\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)} + \frac{\cos\theta\times\cos\theta}{\sin\theta\times(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\times(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta\times\sin^2\theta - \cos\theta\times\cos^2\theta}{\cos\theta\times\sin\theta\times(\sin\theta-\cos\theta)} = \frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos\theta\times\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)\times(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta\times\sin\theta\times(\sin\theta - \cos\theta)}$$

$$[\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)]$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\times\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} + 1$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}\right) = 1 + \sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta$$

$$= 1 + \frac{1}{\cos\theta\cdot\sin\theta} = 1 + \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

$$= 1 + \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

$= 1 + \tan\theta + \cot\theta =$ R.H.S.; **प्रमाणित।**

(iv) L.H.S. $= \dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\cos A}}{\dfrac{1}{\cos A}} = 1 + \cos A$

R.H.S. $= \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ $\qquad (\because 1 - \cos^2 A = \sin^2 A)$

$$= \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A} = \frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{(1-\cos A)}$$

$= 1 + \cos A \quad \therefore$ L.H.S. = R.H.S. **(प्रमाणित)।**

(v) $\dfrac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}$

(अंश और हर को sin A से विभाजित करने पर)

$$=\frac{\dfrac{\cos A}{\sin A}-\dfrac{\sin A}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin A}}{\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\sin A}{\sin A}-\dfrac{1}{\sin A}}=\frac{\cot A-1+\operatorname{cosec}A}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

($\because \operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$ अर्थात् $\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A=1$)

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)-(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)}{\{1+\cot A-\operatorname{cosec}A\}}$$

$[\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2]$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)\times\{1-(\operatorname{cosec}A-\cot A)\}}{\{1+\cot A-\operatorname{cosec}A\}}$$

$$=\frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)\times\{1+\cot A-\operatorname{cosec}A\}}{\{1+\cot A-\operatorname{cosec}A\}}$$

$=\operatorname{cosec} A+\cot A=$ R.H.S. (**प्रमाणित**)।

(vi) L.H.S. $=\dfrac{\sqrt{1+\sin A}}{1-\sin A}=\dfrac{\sqrt{(1+\sin A)(1+\sin A)}}{(1-\sin A)(1-\sin A)}$

$$=\frac{\sqrt{(1+\sin A)^2}}{(1)^2-(\sin A)^2}=\frac{\sqrt{(1+\sin A)^2}}{1-\sin^2 A}=\frac{\sqrt{(1+\sin A)^2}}{\cos^2 A}$$

$$=\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}=\sec A+\tan A$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (**प्रमाणित**)।

(vii) L.H.S. $= \dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$$= \frac{\sin\theta \times \{1 - 2\sin^2\theta\}}{\cos\theta \times \{2\cos^2\theta - 1\}}$$

$$= \frac{\sin\theta \times \{\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin^2\theta\}}{\cos\theta \times \{2\cos^2\theta - (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\}}$$

$(\because \cos^2\theta + \sin\theta = 1)$

$$= \frac{\sin\theta \times \{\cos^2\theta - \sin^2\theta\}}{\cos\theta \times \{\cos^2\theta - \sin^2\theta\}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (**प्रमाणित**)।

(viii) L.H.S. $= (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$= \{\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A \times \operatorname{cosec} A\} + \{\cos^2 A + \sec^2 A$
$+ 2\cos A \times \sec A\}$

$$= \left[\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A \times \frac{1}{\sin A}\right]$$

$\left[\because \operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}\right]$

$$+ \left[\cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A \times \frac{1}{\cos A}\right]$$

$$= \{\sin^2 A + \text{cosec}^2 A + 2\} + \{\cos^2 A + \sec^2 A + 2\}$$

$$\left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A}\right]$$

$$= 2 + 2 + (\sin^2 A + \cos^2 A) + \sec^2 A + \text{cosec}^2 A$$

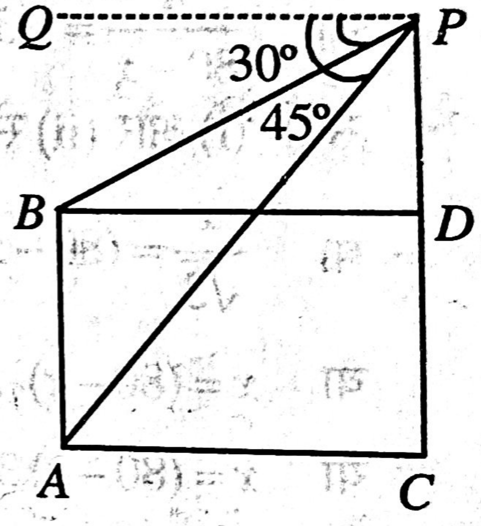
$$= 2 + 2 + 1 + 1 + \tan^2 A + 1 + \cot^2 A$$

$$\left(\because \sec^2 A = \tan^2 A + 1, \text{cos}ec^2 A = \cot^2 A + 1\right)$$

$$= 7 \tan^2 A + \cot^2 A$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (**प्रमाणित**)।

3. एक बहुमंजीला भवन के शिखर से देखने पर एक 8 मी॰ ऊँचे भवन के शिखर और तल के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। बहुमंजिले भवन की ऊँचाई और दोनों भवनों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। **11A, 16C, 20A**



हल : चित्र के अनुसार PC बहुमंजिले भवन को और AB 8m ऊँचे भवन को प्रकट करता है। हम बहुमंजिले भवन की ऊँचाई अर्थात् PC और दो भवनों के बीच की दूरी अर्थात् AC ज्ञात करना चाहते हैं।

चित्र से पता चलता है कि PB समान्तर रेखाओं PQ और BD की एक तिर्थक छेदी रेखा है।

अतः $\angle QPB$ और $\angle PBD$ एकान्तर कोण है और इसलिए बराबर है।

अतः $\angle PBD = 30°$

इसी प्रकार $\angle PAC = 45°$

समकोण ΔPBD में

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $BD = PD\sqrt{3}$

समकोण ΔPAC में हम पाते हैं कि $\frac{PC}{AC} = \tan 45° = 1$

अर्थात् $PC = AC$

और $PC = PD + DC$ इसलिए $PD + DC = AC$

क्योंकि $AC = BD$ और $DC = AB = 8$ cm,

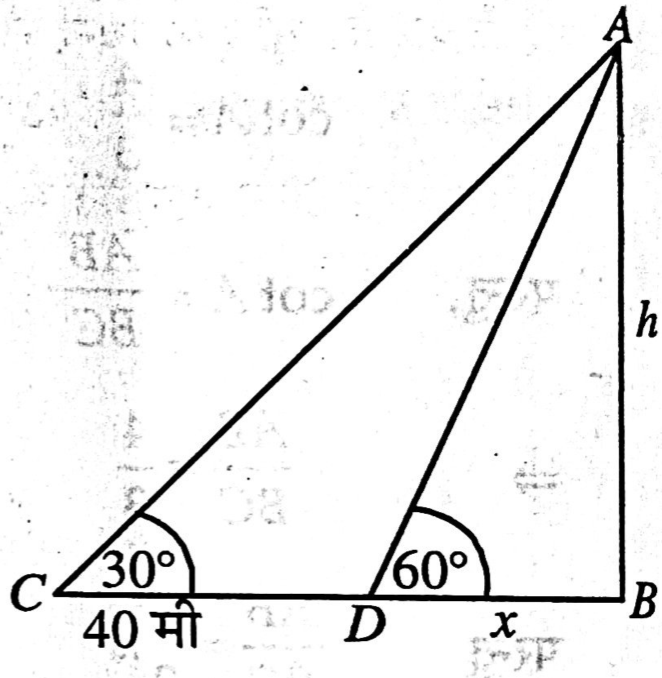
इसलिए $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$ इससे यह प्राप्त होता है।

$$PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1)\text{m}$$

अतः बहुमंजिले भवन की ऊँचाई $\{4(\sqrt{3}+1)+8\}\text{m} = 4(3+\sqrt{3})$ m है और दो भवनों के बीच की दूरी भी $4(3+\sqrt{3})$ m; उत्तर।

4. भूमि के किसी बिन्दु से किसी मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ओर 40 मीटर जाने पर चोटी का उन्नयन कोण 60° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करें। $\boxed{\text{11C, 12 C, 14C}}$

हल : माना कि $AB = h$ मी॰ ऊँचा एक मीनार है। भूमि तल से शीर्ष A का उन्यन कोण 30°एवं 40 मी॰ B की ओर जाने पर बिन्दु D से उन्नयन कोण 60° है।



माना कि $BD = x$ मी॰ है।

समकोण ΔABD में,

$$\tan 60° = \frac{AB}{DB}$$

या $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$

$\therefore$ $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ...(i)

फिर समकोण ΔABC में,

$$\tan 30° = \frac{AB}{BC}$$

या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{40 + x}$

या $\sqrt{3}h = 40 + x$

या $\sqrt{3}h = 40 + \frac{h}{\sqrt{3}}$ (समी॰ (i) से)

या $3h - h = 40\sqrt{3}$

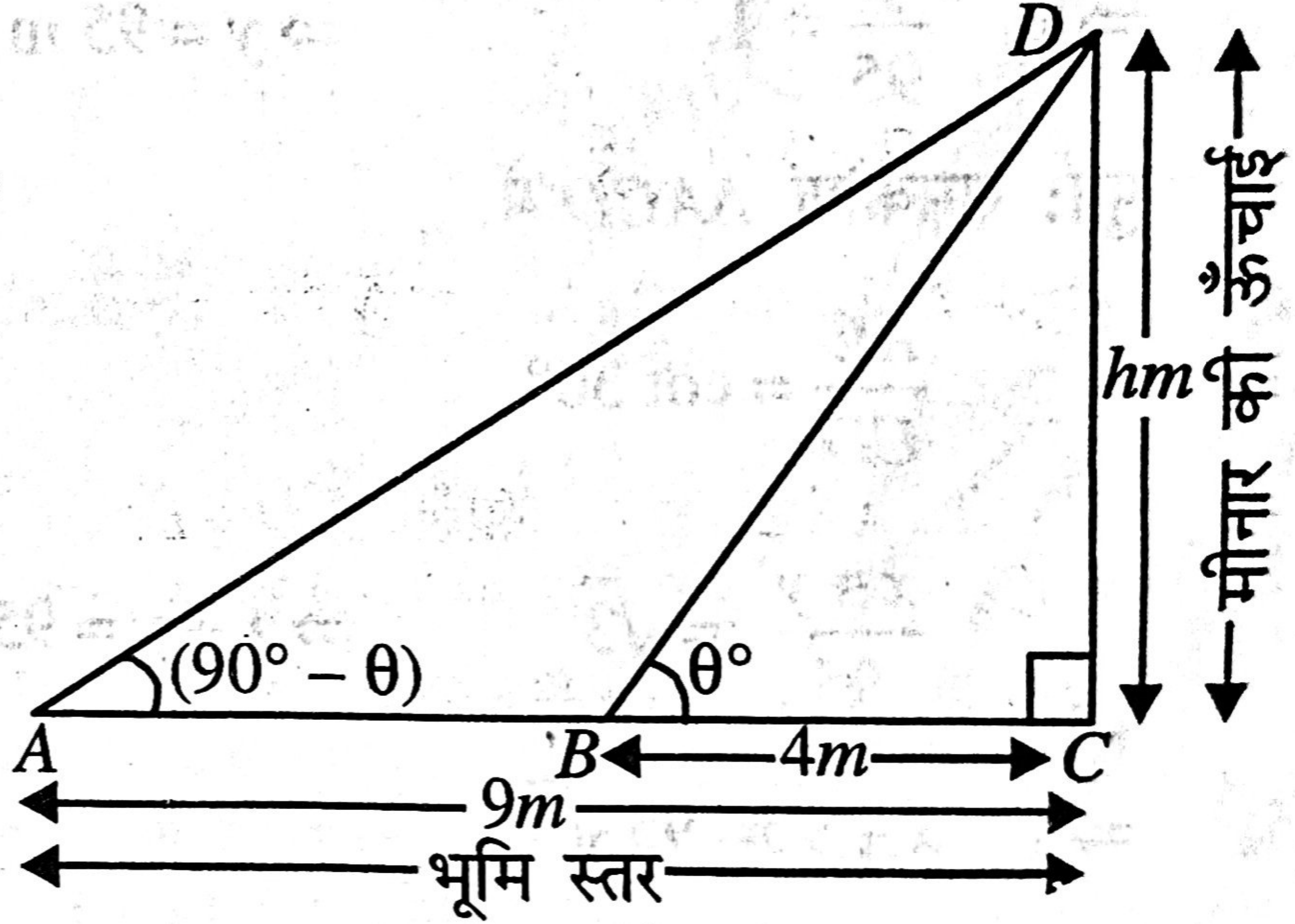
या $2h = 40\sqrt{3}$

$\therefore$ $h = 20\sqrt{3}$ मी॰ $= 20 \times 1{\cdot}73$ मी॰ $= 34{\cdot}64$ मी॰

अतः मीनार की ऊँचाई $= 34{\cdot}64$ मी॰ उत्तर।

9. मीनार के आधार से एक सरल रेखा में 4 m और 9 m की दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 m है। **BM, 11A, 13C, 15A**

हल : मान लीजिए $CD = h\,m$ मीनार की ऊँचाई है और B; A अभीष्ट बिन्दु हैं जो मीनार से क्रमशः 4 m और 9 m की दूरी पर है।



समकोण ΔBCD में,

$$\frac{CD}{BC} = \tan\theta$$

या $$\frac{h}{4} = \tan\theta \quad ...(i)$$

साथ ही, समकोण ΔACD में,

$$\frac{CD}{AC} = \tan(90-\theta)$$

या $$\frac{h}{9} = \cot\theta \quad \text{...(i)}$$

समी॰ (i) और (ii) को गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है।

$$\frac{h}{4} \times \frac{h}{9} = \tan\theta \times \cot\theta$$

या $$\frac{h^2}{36} = \tan\theta \times \frac{1}{\tan\theta}$$

या $h^2 = 36 = (6)^2$

या $h = 6$

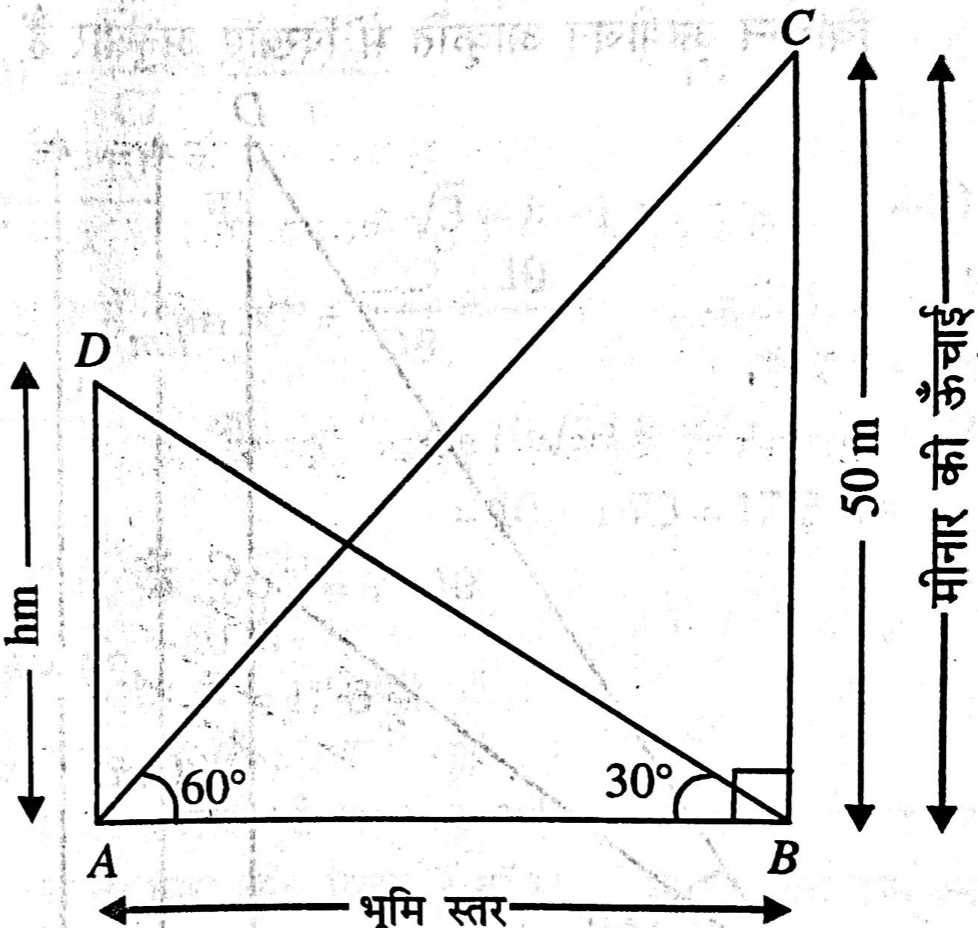
अतः, मीनार की ऊँचाई 6 m है; उत्तर।

12. एक मीनार के पाद-बिन्दु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद-बिन्दु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50 m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

BM, 12A, 15A, 16C, 17A

हल : मान लीजिए $BC = 50$ m मीनार की ऊँचाई है और $AD = h$m भवन की ऊँचाई है। मीनार के पाद-बिन्दु से भवन के शिख़र का और भवन के प़ास बिन्दु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 60° हैं।

विभिन्न आयोजन आकृति में दिखाइए अनुसार हैं।



समकोण ΔABC में, $\dfrac{AB}{BC} = \cot 60°$

या $\dfrac{AB}{50} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ या $AB = \dfrac{50}{\sqrt{3}}$ ...(i)

साथ ही, समकोण ΔDAB में, $\dfrac{AB}{DA} = \cot 30°$

या $\dfrac{AB}{h} = \sqrt{3}$ या $AB = h\sqrt{3}$ ...(ii)

समी० (i) और (ii), से हमें प्राप्त होता है $\dfrac{50}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$

या $\dfrac{50}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = h$ या $h = \dfrac{50}{3} = 16 \cdot 6666$

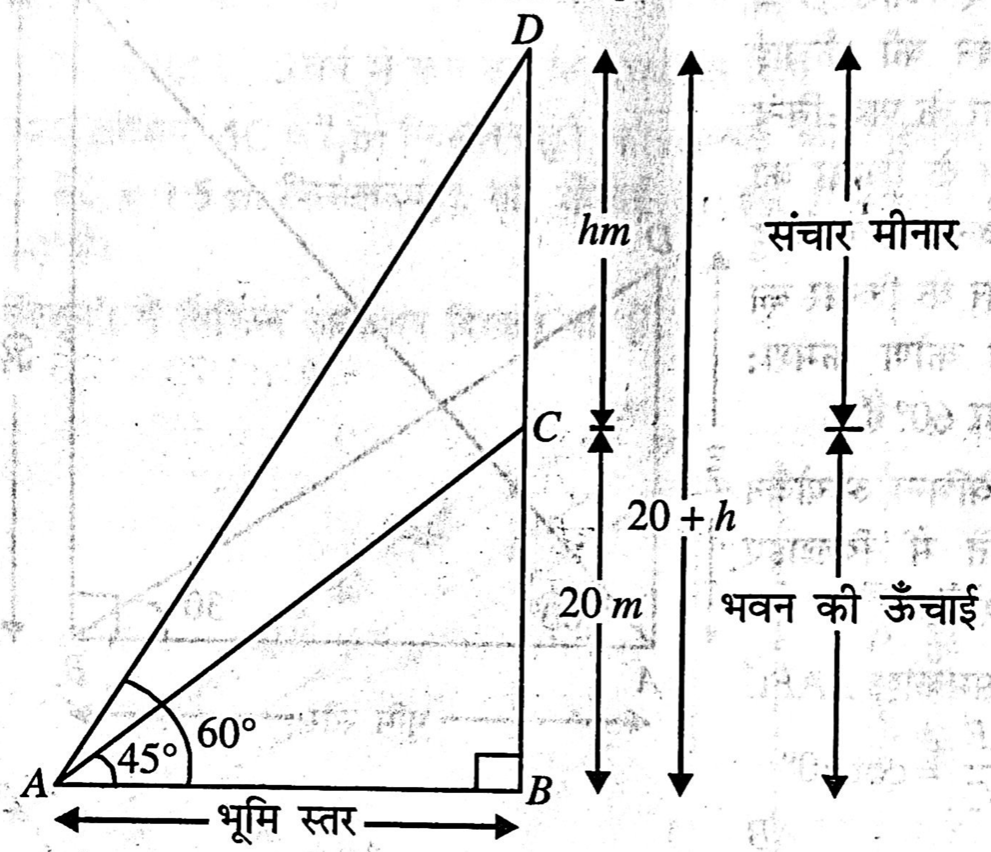
या $h = 16{\cdot}70$ m (लगभग)

अतः, भवन की ऊँचाई 16·70 m है; उत्तर।

16. भूमि के एक बिन्दु से एक 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। **BM, 12 C, 13 A, 19 C**

हल : मान लीजिए $BC = 20$ m भवन की ऊँचाई है और $DC = h$ m संचार भवन की ऊँचाई है। भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं।

विभिन्न आयोजन आकृति में दिखाए अनुसार हैं



समकोण ΔABC में,

$$\frac{AB}{BC} = \cot 45°$$

या $\frac{AB}{20} = 1$ या $AB = 20m$ ...(i)

साथ ही, समकोण ΔABD में,

$$\frac{AB}{BD} = \cot 60°$$

या $\frac{AB}{20+h} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ या $AB = \frac{20+h}{\sqrt{3}}$

या $AB = \frac{(20+h)}{\sqrt{3}}$ ...(ii)

समी० (i) और (ii) से हमें प्राप्त होता है,

$20 = \frac{(20+h)}{\sqrt{3}}$ या $20\sqrt{3} = 20 + h$

या $h = 20\sqrt{3} - 20$ या $h = 20(\sqrt{3} - 1)$ m

$= 20\,(1{\cdot}732 - 1)$m

$= 20 \times 0{\cdot}732 = 14{\cdot}64$ m

अतः, मीनार की ऊँचाई 14·64 m है; उत्तर।

$\Rightarrow \quad AB^2 = AD \cdot AC$ ...(i)

पुन:, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$\therefore \quad \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$ (भुजाएँ समानुपाती होगी)

$\Rightarrow \quad BC^2 = AC \cdot CD$ ...(ii)

समी॰ (i) एवं (ii) को जोड़ने पर,

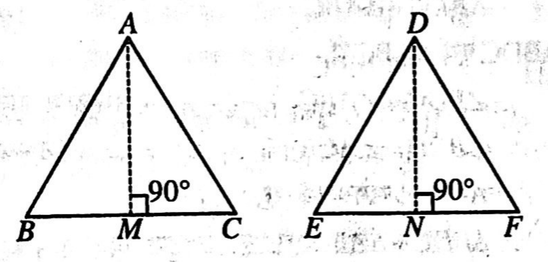
$$AB^2 + BC^2 = AD \cdot AC + CD \cdot AC = AC(AD + CD)$$

$$= AC \cdot AC = AC^2$$

$\Rightarrow \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$; प्रमाणित।

. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात किन्हीं दो संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है। **BM, 12A, 15A, 17A**

हल : दिया गया है : मान लें कि ΔABC एवं ΔDEF दो समरूप त्रिभुज है।



अर्थात् $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F$ ...(i)

तथा $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ...(ii)

सिद्ध करना है : $\frac{\Delta ABC \text{ का क्षे॰}}{\Delta DEF \text{ का क्षे॰}} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{AB}{DE^2}$

रचना : A से $AM \perp BC$ एवं D से $DN \perp EF$ खींचा

प्रमाण : ΔABC का क्षे॰ $= \frac{1}{2} \times BC \times AM$

ΔDEF का क्षे॰ $= \frac{1}{2} \times EF \times DN$

$\therefore \quad \frac{\Delta ABC \text{ का क्षे॰}}{\Delta DEF \text{ का क्षे॰}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AM}{\frac{1}{2} EF \times DN} = \frac{BC \times AM}{EF \times DN}$ ...(iii)

पुन: ΔABM एवं ΔDEN में,

$\angle B = \angle E$ (दिया गया है), $\angle M = \angle N$

(समकोण होने के कारण)

$\therefore$ A–A–A समरूपता से, $\Delta ABM \sim \Delta DEN$

$\therefore \quad \frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE}$ ($\because$ संगत भुजाएँ समानुपाती होगी)

किन्तु समी॰ (ii) से $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ $\therefore$ $\frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF}$ ...(iv)

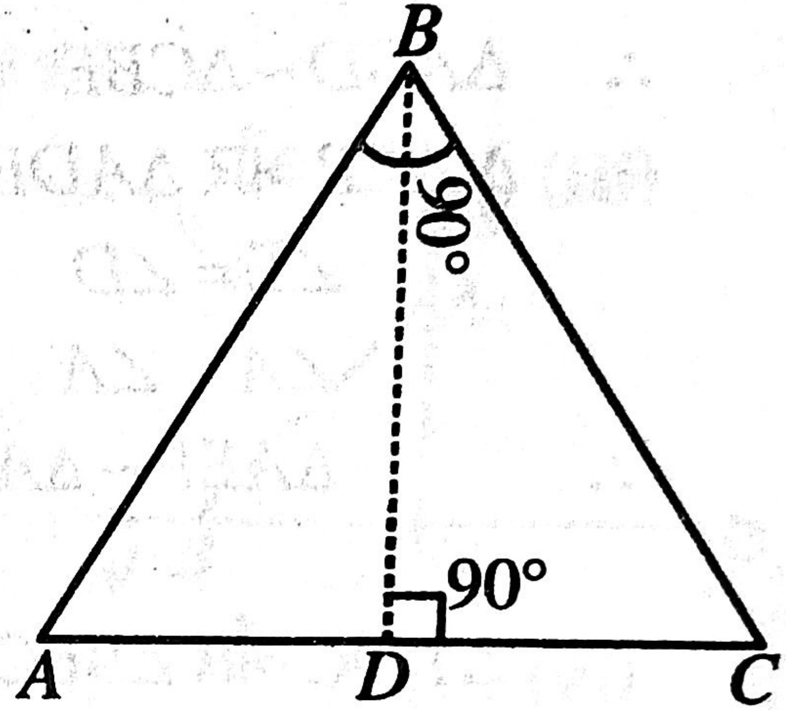
समी॰ (iv) का मान (iii) में रखने पर,

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षे॰}}{\Delta DEF \text{ का क्षे॰}} = \frac{BC \times BC}{EF \times EF} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

$\left[\text{समी॰ (ii) से } \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE} \therefore \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AB^2}{DE^2}\right]$; प्रमाणित।

10. सिद्ध करें कि एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के बराबर होता है। **BM, 12C, 13A, 15A, 17A**

हल : दिया गया है : माना कि ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B$ समकोण है।



सिद्ध करना है :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : B से $BD \perp AC$ खींचा।

प्रमाण : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

($\because$ किसी समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर लंब डाला जाए तो इस लंब के दोनों बने त्रिभुज संपूर्ण त्रिभुज के समरूप होते हैं।)

$$\therefore \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$$ ($\because$ भुजाएँ समानुपाती होगी)

12. दो संख्याओं के वर्गों का अंतर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का आठ गुना है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए। **11C,13C**

हल : मान लीजिए बड़ी संख्या $= x$

छोटी संख्या $= y$

प्रश्न की पहली शर्त के अनुसार,

$$x^2 - y^2 = 180 \quad \text{...(i)}$$

प्रश्न की दूसरी शर्त के अनुसार

$$y^2 = 8x \quad \text{...(ii)}$$

समी० (i) और (ii) से हम प्राप्त करते हैं,

$$x^2 - 8x = 180$$

या $x^2 - 8x - 180 = 0$

इसकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$\therefore \quad a = 1, b = -8, c = -180$

और $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (-180)$

$= 64 + 720$

$= 784 > 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{784}}{2 \times 1} = \frac{8 \pm 28}{2}$$

$$= \frac{8+28}{2} \text{ और } \frac{8-28}{2} = \frac{36}{2} \text{ और } \frac{-20}{2} = 18 \text{ और } -10$$

जब $x = -10$ तो, समी० (ii) से

$y^2 = 8(-10) = -80$, जो कि संभव नहीं है।

इसलिए हम $x = -10$ को छोड़ देते हैं।

जब $x = 18$, तो समी० (ii) से,

$$y^2 = 8(18) = 144$$

या $\quad y = \pm\sqrt{144} = \pm 12$

अतः अभीष्ट संख्याएँ 18 और 12

या 18 और +12 हैं; उत्तर।

3. एक बोट, जिसकी स्थिर जल में चाल 18 किमी/घंटा है 24 किमी धारा के प्रतिकूल जाने में वही दूरी धारा के अनुकूल जाने की अपेक्षा एक घंटा अधिक लेती है। धारा की चाल ज्ञात करें। **BM, 11 C, 21 A**

हल : माना कि धारा की चाल $= x$ किमी/घंटा है।

तय की गई दूरी $= 24$ किमी है।

धारा की दिशा में लगा समय $t_1 = \dfrac{24}{18+x}$ घंटा

धारा की विपरीत दिशा में लगा समय $t_2 = \dfrac{24}{18-x}$ घंटा

प्रश्न से, $t_2 - t_1 = 1$

या $\dfrac{24}{18-x} - \dfrac{24}{18+x} = 1$

या $\dfrac{24(18+x-18+x)}{(18-x)(18+x)} = 1$

या $48x = 324 - x^2$

या $x^2 + 48x - 324 = 0$

या $x^2 + 54x - 6x - 324 = 0$

या $x(x+54) - 6(x+54) = 0$

या $(x-6)(x+54) = 0$ $\quad \therefore x = 6$ किमी/घंटा; उत्तर।

एक भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है, जब उसके अंश से एक घटाया जाता है और वह $\frac{1}{4}$ हो जाती है जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए। **BM, 13 A**

हल : माना कि भिन्न $= \frac{x}{y}$

$\therefore$ प्रश्नानुसार $\frac{x-1}{y} = \frac{1}{3}$

या, $3x-3=y$ या, $3x-y=3$ ... (i)

पुनः $\frac{x}{y+8} = \frac{1}{4}$

या $4x = y+8$

या $4x-y=8$ ... (ii

समी॰ (ii) में समी॰ (i) को घटाने पर

$x = 5$

$\therefore$ समी॰ (i) से $3x-y=3$

$3\times5-y=3$

या $y = 15-3 = 12$

$\therefore$ भिन्न $\frac{x}{y} = \frac{5}{12}$; उत्तर।

रीषभ नदी की धारा की दिशा में 2 घण्टे में 20 किमी॰ तथा धारा के विरुद्ध 2 घण्टे में 4 किमी॰ नाव चला सकता है। स्थिर जल में उसके नाव चलाने की चाल और धारा की चाल ज्ञात करें।

हल : माना नाव की चाल स्थिर जल में x किमी/घण्टा तथा धारा की चाल y किमी/घण्टा है।

अतः धारा के साथ नाव की चाल $= (x+y)$ किमी/घण्टा

तथा धारा के विपरीत नाव की चाल $= (x-y)$ किमी/घण्टा

प्रश्नानुसार, धारा की दिशा में, रीषभ नाव को 2 घण्टे में 20 किमी॰ चलाता है।

अतः $2x+2y=20 \Rightarrow x+y=10$ ...(i)

पुनः धारा के विरुद्ध रीषभ नाव को 2 घण्टे में 4 किमी॰ चलाता है।

अतः $2x-2y=4 \Rightarrow x-y=2$ ...(ii)

समी॰ (i) और समी॰ (ii) को जोड़ने पर,

$$2x=12; \qquad \therefore x=6$$

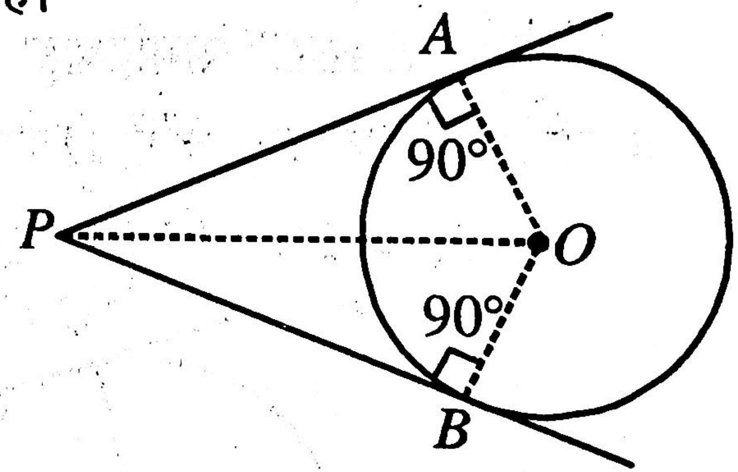
$x=6$ के मान को समी॰ (i) में रखने पर,

$$6+y=10 \Rightarrow y=10-6=4$$

अतः नाव की चाल स्थिर जल में 6 किमी॰/घण्टा तथा धारा की चाल 4 किमी॰/घण्टा है; उत्तर।

बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती है।

हल : मान लिया कि O केन्द्र वाले वृत्त के बाहर एक बिन्दु P से PA और PB वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।



तो सिद्ध करना है कि $PA = PB$

रचना : O को A, B और P से मिलाया।

प्रमाण : $\because$ OA वृत्त की त्रिज्या तथा PA स्पर्श रेखा है।

$\therefore$ $\angle OAP = 90°$

इसी प्रकार, $\angle OBP = 90°$

अब ΔOAP तथा ΔOBP में

$OA = OB$ ($\because$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$\angle OAP = \angle OBP = 90°$

तथा $OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ R.H.S सर्वांगसमता से

$\Delta OAP = \Delta OBP$

अतः $PA = PB$; प्रमाणित।

21. एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm त्रिज्या वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है। इस खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। **BM, 12 A, 14 C, 17 A, 21 A**

हल : शंकु की त्रिज्या = अर्धगोले की त्रिज्या

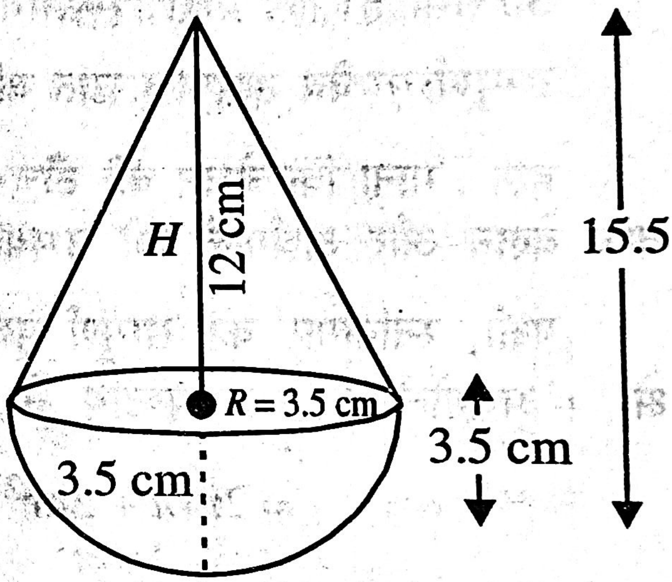
$(R) = 3.5$ cm

खिलौने की कुल ऊँचाई = 15.5 cm

∴ शंकु की ऊँचाई

$= (15.5 - 3.5)$

$= 12$ cm



शंकु की तिर्यक ऊँचाई H

$= \sqrt{R^2 + H^2}$

$= \sqrt{(3.5)^2 + (12)^2}$

$= \sqrt{12.25 + 144} \quad = \sqrt{156.25}$

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(l) = 12.5$ cm

बर्तन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi RL + 2\pi R^2 = \pi R\,[L + 2R]$

$= \frac{22}{7} \times 3.5\,[12.5 + 2\,(3.5)] = \frac{22}{7} \times 3.5\,[19.5]$

$= \frac{150.15}{7} = 214.5 \text{ cm}^3$

∴ बर्तन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 214.5 \text{ cm}^3$; उत्तर।

41. पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है। दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 4 cm और 2 cm है। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए। **BM, 15 A, 19 C**

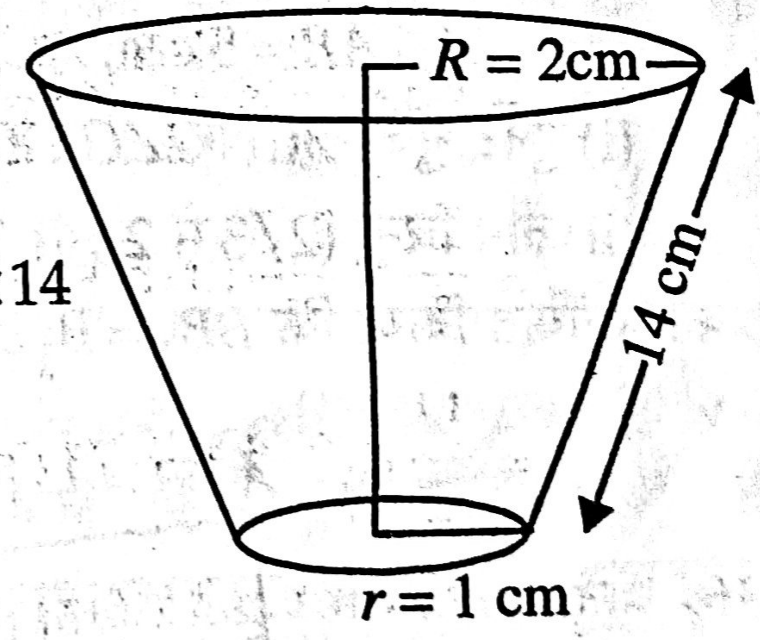
हल : ऊपरी सिरे का त्रिज्या $R = 2$ cm

निचले सिरे की त्रिज्या $r = 1$ cm

गिलास की ऊँचाई $h = 14$ cm

$\because$ गिलास छिन्नक के आकार का है। छिन्नक गिलास की आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr) \cdot h$$



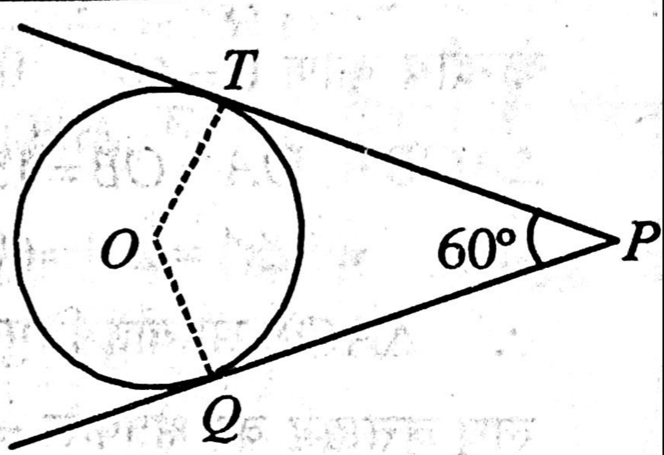
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7}(2^2 + 1^2 + 2 \times 1) \times 14$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7}(4 + 1 + 2) \times 14$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 14 = \frac{22 \times 14}{3} = 102 \cdot 67 \text{ cm}^3;$$ उत्तर।

7. 5 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए, जो परस्प 60° के कोण पर झुकी हों। **BM, 11 A, 12 A, 14 A, 14 C, 19 A**

हल : रचना के चरण :



(i) अभीष्ट आकृति का कच्चा खाका खींचिए।

$\because$ स्पर्श रेखाएँ परस्पर 60° का कोण बनाती हैं।

$\angle OTP = \angle OQT = 90°$

[स्पर्श रेखा वृत्त की त्रिज्या पर लम्ब है।]

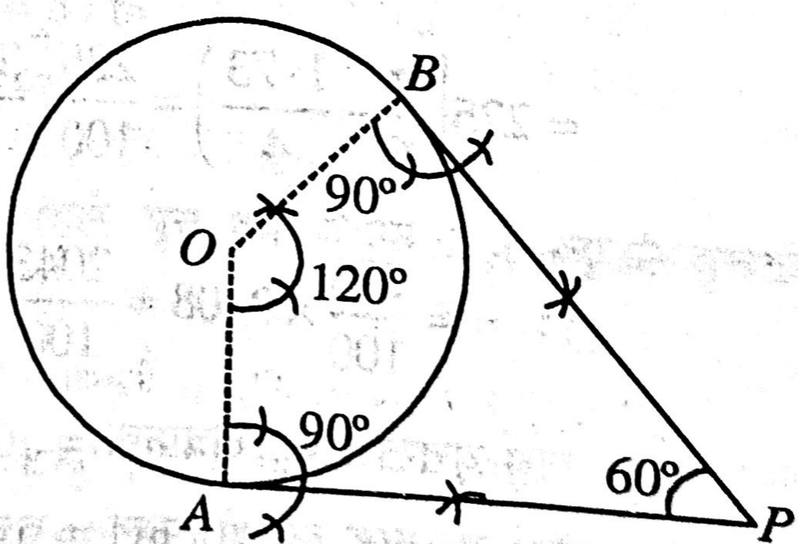
त्रिज्याओं का परस्पर झुकाव ज्ञात करना कि

$$\angle TOQ + \angle OTP + \angle OQT + \angle TPQ = 360°$$

[चतुर्भुज के कोण योग गुण]

या $\angle TOQ + 90° + 90° + 60° = 360°$

या $\angle TOQ = 360 - 90° - 90° - 60° = 120°$



(ii) 5 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए।

(iii) इस वृत्त की दो त्रिज्याएँ जो परस्पर 120° का कोण बनाएँ।

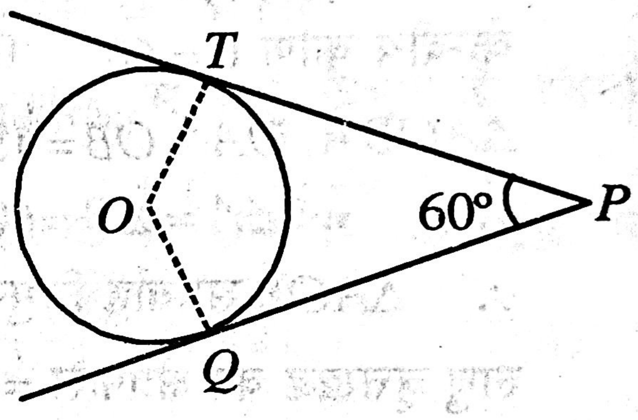
(iv) त्रिज्याएँ वृत्त को 'A' और 'B' पर प्रतिच्छेद करें।

(v) A और B पर 90° का कोण बनाएँ जो परस्पर 'P' पर प्रतिच्छेद करें।

(vi) PA और PB अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

7. 5 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए, जो परस्पर 60° के कोण पर झुकी हों। **BM, 11 A, 12 A, 14 A, 14 C, 19 A**

हल : रचना के चरण :



(i) अभीष्ट आकृति का कच्चा खाका खींचिए।

∵ स्पर्श रेखाएँ परस्पर 60° का कोण बनाती हैं।

$\angle OTP = \angle OQT = 90°$

[स्पर्श रेखा वृत्त की त्रिज्या पर लम्ब है।]

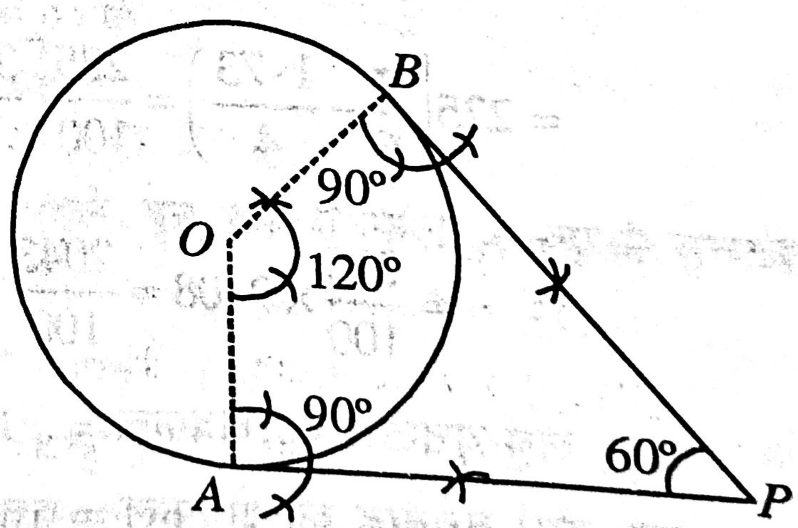
त्रिज्याओं का परस्पर झुकाव ज्ञात करना कि

$$\angle TOQ + \angle OTP + \angle OQT + \angle TPQ = 360°$$

[चतुर्भुज के कोण योग गुण]

या $\angle TOQ + 90° + 90° + 60° = 360°$

या $\angle TOQ = 360 - 90° - 90° - 60° = 120°$



(ii) 5 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए।

(iii) इस वृत्त की दो त्रिज्याएँ जो परस्पर 120° का कोण बनाएँ।

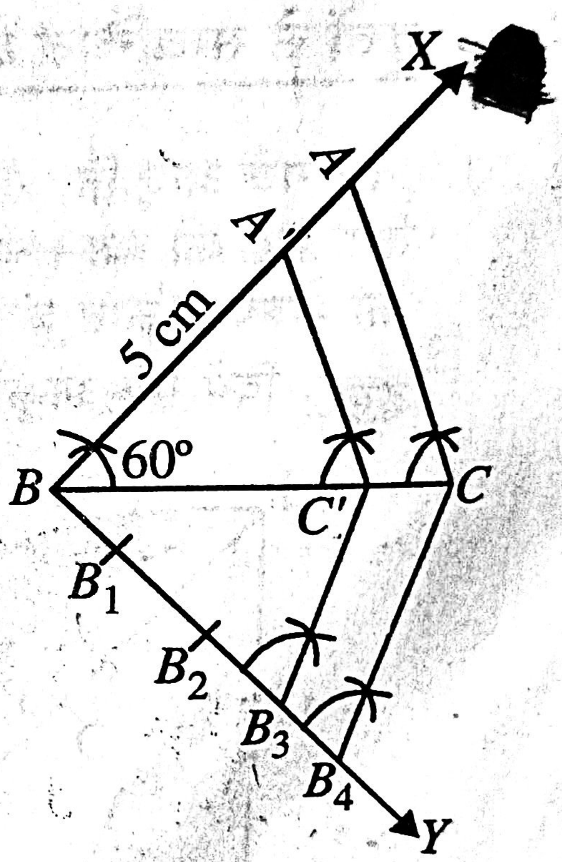
(iv) त्रिज्याएँ वृत्त को 'A' और 'B' पर प्रतिच्छेद करें।

(v) A और B पर 90° का कोण बनाएँ जो परस्पर 'P' पर प्रतिच्छेद करें।

(vi) PA और PB अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

9. एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $BC = 6$ cm, $AB = 5$ cm और $\angle ABC = 60^\circ$ हो। फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ गुनी हों। **12C, 13A, 13C, 15A, 19C, 20A**

हल : रचना के चरण :



(i) रेखाखण्ड $BC = 6$ cm लें।

(ii) B पर 60° का कोण बनाइए अर्थात् $\angle CBX = 60^\circ$ बनाएँ।

(iii) B को केन्द्र मानकर और 5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो BX को 'A' पर प्रतिच्छेद करे।

(iv) A और C को मिलाएँ।

(v) BC के नीचे B पर कोई न्यून कोण बनाएँ।

(vi) चार बिन्दु ($\frac{3}{4}$ में 3 और 4 में से बड़ी संख्या) B_1, B_2, B_3, B_4 रेखा BY पर इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ हो।

(vii) B_4 और C को मिलाएँ।

(viii) B_3 ($\frac{3}{4}$ में 3 और 4 से छोटी संख्या) में से एक रेखा B_4C के समान्तर संगत कोण बनाती हुई खींचिए। मान लें कि B_3 में से खींची रेखा BC को C' पर प्रतिच्छेद करती है।

(ix) C' में से एक रेखा CA के समान्तर खींचें जो BA को A' पर प्रतिच्छेद करती है।

$\Delta A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है जिसकी संगत भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं के $\frac{3}{4}$ गुनी है।

3. निम्नलिखित बंटन का माध्य ज्ञात करें :

वर्ग-अंतराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारंबारता	20	24	40	36	20

वर्ग-अंतराल	बारंबारता (f)	x	f × x
0–10	20	5	100
10–20	24	15	360
20–30	40	25	1000
30–40	36	35	1260
40–50	20	45	900
	$\Sigma f = 140$		$\Sigma fx = 3620$

$\therefore$ माध्य $= \dfrac{\sum fx}{\sum f}$

$= \dfrac{3620}{140}$

$= 25.86$ (लगभग) Ans.

17. निम्नलिखित बंटन का बहुलक ज्ञात करें :

वर्ग-अंतराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारंबारता	7	17	32	10	4

17.

वर्ग-अंतराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
बारंबारता	7	17	32	10	4	2

यहाँ अधिकतम बारंबारता 32 है तथा इसका संगत वर्ग 20 – 30 है।

अतः 20 – 30 बहुलक वर्ग है।

$l = 20, h = 10, f_1 = 32, f_0 = 17, f_2 = 10$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 20 + \left(\frac{32 - 17}{2 \times 32 - 17 - 10}\right) \times 10$$

$$= 20 + \frac{150}{37}$$

$$= 20 + 4.054$$

$$= 24.054$$ **Ans.**